

壹、緒論

代數是數學教育的核心，可幫助學生理解數學的概念與步驟，創造和解釋數學的模式，但長久以來，卻只被視為是進入較高階數學的門檻，是種「不公平的機器」，嚴重使得學生產生疏離（Kaput, 1998）。Kaput認為，要解決代數學習所造成的不公平現象，須將代數的學習視為是新公民的權力、所有學生都需擁有的經驗。為呼應「所有人的代數」之要求，美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）重新檢驗學校的代數教學，認為代數不應是國中以後才被教導的科目，應從幼稚園起就不斷地持續接觸。而我國教育部（2003）順應世界潮流，為培養學生觀察數量關係，展現數學結構的能力，也將代數主題向下延伸至小學。Kaput提議代數的內涵需包含一般化和形式化的樣式與其限制、系統的引導形式化的操弄、抽離關係結構與系統計算的研究、整合控制的變項、模式與現象的語言群集，才能透過數學知識的應用，融入不同形式的代數思考。Kaput同時也主張代數的學習應提供有規則變化的樣式給予學生操作，從推理的歷程發現數學問題的結構關係，進而以數學的符號或表列式整合數學概念。

但何謂一般化？Dreyfus（1991）將其視為辨認範例的共通性（commonalities），對特殊範例進行推知（derive）或化約（induce），將正確歸納的結果擴展到更多案例的歷程。Kieran（1996）認為，代數進程需包含表徵、轉化與後設層次活動的連結，才能有效地協助學生進行代數思考。表徵的活動包含產出表列式以呈現問題關係；轉化的活動則以規則之間的變化為主，例如：因素分解與簡化項目，其重點在於形式變化時能保留等價的概念；後設層次的活動則為應用適當的代數內容做為工具，進行解題、塑造和證明。

上述學者皆建議，算術是代數的一部分，小學的教學必須將重點放在支持算術有關的代數特徵上，而代數特徵的呈現，就以樣式一般化的活動最為適宜（Kaput, 1998; NCTM, 2000）。在臺灣，《九年一貫課程綱要》中之「連結」能力指標詮釋有關「轉換」部分，強調學生能把情境中與問題相關的數、量及形析出，並以數學語言表出，熟悉解題的各種歷程，包含蒐集、觀察、臆測、檢驗、

推演、驗證、論證等，以求克盡其功，如此一般化就是最佳的活動（教育部，2003）。例如：小學低年級之九九乘法活動，教師若能以數列的方式逐次呈現，將有助於學生觀察積的前後變化以及被乘數和乘數之間的關係，經由一般化而學習乘法「倍數」的概念；中年級之乘法交換律與結合律的學習，亦可透過數量之圖示範例比較，經由一般化整合後得出 $A \times B = B \times A$ 或 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ 的概念；到高年級怎樣解題的單元，一般化更可促進學生對函數關係的理解。另外，在圖形面積公式的歸納、分數小數概念的理解上，若能透過一般化的活動，亦可協助學生輕易解題。由此可知，一般化能力的展現可應用於國小數學許多重要的領域上。代數符號包含複雜的規則與內在關係，學生若能理解樣式和符號規則與它們之間的關係，將能進行數學的溝通並產出概念。協助學生克服代數思考的困境，首要任務就在於理解他們如何對樣式問題進行推想和解題？如何對樣式一般化的推想和解題進行連結？Blanton與Kaput（2002）主張，學生可透過表徵對情境進行感知與呈現組織的意義，進而描述情境的運算與關係，問題可採取文字、圖形、表格、方程式等呈現案例，經過判讀與應用後，可做為發展一般化的基礎。

表徵是符號、特徵、影像或物件的輪廓圖像，可以「代表」或「呈現」某些事物。以表徵的本質而言，「呈現」此術語可採用多種方法加以說明，例如：對應（correspond to）、表示（denote）、描繪（depict）、體現（embody）、編碼（encode）、誘導（evoke）、標記（label）、解釋（mean）、產出（produce）、指涉（refer to）、建議（suggest）、符號化（symbolize）等（Goldin, 1998）。要具體呈現這些定義，需將進行「呈現」時所包含的實體加以區別，採取一些方式讓某實體可代表另一實體，例如：可用符號或文字表示可被計數出的具體物件集合。

近年來，NCTM（2000）明瞭算術「轉換」（translating）代數的重要性，將表徵視為是「歷程的標準」，將其解釋為數學領域獲得和運用知識的方法，例如：學童會運用數字呈現號碼、字母代表變數、特殊的特徵（如 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 代表數學和邏輯的運算）。NCTM指出，「不同的表徵可從不同的觀點詮釋相同複雜的概念或關係」。因此，要深入確認數學知識，學童需要一些不同表徵來支持他們的理解。而不同表徵問題的呈現，將有助於學生推理、臆測等一般化能力