

壹、前言

在愛因斯坦推薦的一本數學介紹書《數學是什麼》（*What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*）中寫到：「數學反映出人類積極的意志，深思熟慮的推理，以及在美學上盡善盡美的祈求」（Courant, Robbins, & Stewart, 1941/2010）。數學是培養思考能力的極佳方式之一，美國國家科學委員會（National Science Board）在2006年指出，數學成就本身就是重要的，且對國家經濟發展也十分關鍵（引自Reyna & Brainerd, 2007）。因此，從小開始學習與培養數學能力的發展，對個人與社會的進步皆有其深遠影響。「比例」（proportion）是小學高年級數學的重要主題之一，美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）於1989年聲稱，比例推理（proportional reasoning）的重要性可謂不論付出多少時間及努力都必須確保它的良好發展；NCTM更在2000年會議上指出，比例是一個重要的整合性思路，連接了六到八年級學生所學的許多數學主題（Lamon, 2007）。Smith於2002年指出，比例是小學數學學習上最豐富的領域，在認知上極為複雜且難以教導（Pelen & Artut, 2016）。

從上述可知，比例推理能力的重要性和複雜性，為了更了解學童比例推理能力的發展，在2001年由美國教育測驗服務社（Educational Testing Service, ETS）學者G. P. Baxter及卡內基美隆大學（Carnegie Mellon University）教授B. Junker邀請多位專家學者，在參閱各方面的相關文獻後提出比例推理發展模式，將學童比例推理能力進展分為五個階段（Baxter & Junker, 2001）。卡內基美隆大學教授Weaver與Junker（2004）參考此發展模式，編製測驗並進行心理計量與統計模式的深入研究。此比例推理發展模式至今仍為ETS研究所採用，如Cayton-Hodges等人（2012）。除比例推理發展模式外，近年來亦有學者Steinthorsdottir與Sriraman（2009）探討比例推理的發展軌跡，並將其分為四個水準。Carney等人（2015）則參考引用來編製測驗，並以Rasch model分析其試題難度。有鑑於比例推理發展模式涵蓋內容統整詳盡，學習軌跡對學童解決比例問題的描述清楚具體，因此，本研究綜合兩者來設計比例推理能力評量。

在評量形式方面，Smith與Caputi在2005年提及，由於電腦化測驗的多項優勢，如測驗保密性、成本與時間的縮減、結果回報的快速、供後續試題分析的自動紀錄（Terzis & Economides, 2011），加上適性測驗的潛力頗受推薦，因此，選擇以電腦化測驗作為評量形式。此外，在影響比例推理作業表現的因素方面，性別與年級是其中的兩個因素。就年級而言，不少文獻指出比例問題的答對率隨著

年齡增長而急遽地上升。然而就性別而言，有學者提出數學成就性別無差異假說（gender similarities hypothesis），且研究結果與假說相符（Else-Quest, Hyde, & Linn, 2010）。不過，在比例推理能力的研究上，卻發現性別因子達統計顯著，且男生高於女生（Yenilmez, Sungur, & Tekkaya, 2005），與數學成就的論述不一致。有鑑於此，本研究納入年級與性別兩變項進行探討。

綜上所述，本研究旨在以Baxter與Junker（2001）、Steinthorsdottir與Sriraman（2009）的比例推理發展軌跡理論為基礎，研發電腦化比例推理能力評量，初步檢核其信、效度並檢視各階段試題的難度，進而描述實徵難度層次的試題特徵，最後再以學生的測驗表現評估年級與性別的影響。本研究結果具實務應用價值，可充分描述影響學生表現的關鍵認知成分，且有助於學童比例學習教學方案的調整。

貳、文獻探討

一、數學能力進展的軌跡與評量

Clements與Sarama（2004）將學習軌跡（learning trajectories）定義為學童在一特定數學領域中其思考與學習的描述，以及一條連貫一系列教學活動的軸線。學習軌跡至關重要，由於學童的想法及他們對數學情境的解釋常不同於成人，教師必須能解釋學童正在做及想什麼，並且試圖從其觀點來看數學情境，而有關學習軌跡的知識增進了教師對學童思考的理解，幫助教師了解學童數學理解的階段，並提供適合該階段的教學活動（Sarama & Clements, 2009）。

*Knowing what Students Know*書中清楚提及用來觀察學生表現的評量試題應來自於學生學習的認知模型，而作答結果應受到合理的檢驗並運用統計模型來檢視是否學生在不同試題的表現符合在認知模型為真之下的預期（Pellegrino, Chudowsky, & Glaser, 2001）。在學習軌跡與評量設計的概念之間存在對應關係是至關重要的，測驗設計所依據的認知模型將能幫助教師把注意力置於學生的進展從哪裡來又往哪裡去的脈絡上，因此，推動學習軌跡的發展同時為教師們提供新的工具是重要的（Daro, Mosher, & Corcoran, 2011）。Daro等人（2011）建議需要新的研究來填補學習軌跡於重要知識上的空白，目前對數學學習軌跡關鍵的空缺之一就是比例推理。因此，本研究參考Baxter與Junker（2001）的比例推理發展模式及Steinthorsdottir與Sriraman（2009）提出的比例推理發展軌跡設計測驗，探討文獻各階段試題的難度是否如比例推理發展軌跡的預期。