

## 壹、緒論

數學證明具有闡釋、溝通與確信的功能 (Hanna, 2000)，同時，在課室教學的實務中，也是促進數學理解的重要工具 (Hanna & Jahnke, 1996)。Niss (2002) 將數學推理列為中學生應具備的八項數學能力之一，其中以理解他人的論點與抓取論點的核心概念為數學推理的基本要求。在中學階段，幾何證明經常用來做為引導中學生學習數學證明的入門課程，卻也是中學生學習數學的困難點之一。因此，如何引導學生有效率地理解幾何證明是近年來數學教育研究的重點。國際數學教育委員會 (International Commission on Mathematical Instruction, ICMI) 即以「數學證明與論證的教與學」為主題進行系列的論文研究 (Hanna & de Villiers, 2012)。其中，更有不少研究在強調理解數學證明對數學認知的重要性及如何輔助學生理解幾何證明 (Longo, 2012; Selden, 2012; Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, & Winicki-Landman, 2012)。

對正在學習幾何證明的學生而言，不僅做證明是件困難的作業，而且在閱讀證明文本的理解過程，也是件複雜的作業。近來的一些研究 (左台益等, 2011; 葉明達、柳賢, 2007; Selden & Selden, 2003; Yang & Lin,

2008) 也說明理解幾何證明本身是一個非常複雜的作業過程。這些研究顯示理解幾何證明的複雜性牽涉到的一些基本的困難認知因素，如：一、先備的數學知識，亦即個體的數學經驗；二、邏輯結構與論述的能力；三、數學敘述與表徵的轉譯與整合的技能，它通常需要整合語意、符號、圖形等不同表徵；四、適當切割與重整的後設作業策略。因此，降低幾何證明作業的認知複雜度是輔助學生理解幾何證明的基本要求。

左台益等人 (2011) 將一個複雜的幾何證明過程依據其數學結構與 Duval (1998) 的推理資訊組織構想，分為微觀、局部、整體三層次做分段切割，探討此分段方式對專家和生手在閱讀證明時的影響。研究顯示，以分段方式降低幾何證明作業的複雜度能夠降低學習者的認知負荷，但對其閱讀理解表現並無顯著的效果。其中，對於認知負荷感受與理解表現兩者之間是否具有何種的關聯性並未深入探究。然而，從課堂教學實務面，若能了解學生的認知負荷感受與學習表現間的關係，將有助於數學教師在幾何證明的教學時，不僅注意證明作業的複雜度，同時關心學生的認知負荷與可能的理解表現。近年來對於專家和生手如何理解或建構數學證明的策略引起數學教育研究者的重視 (Inglis & Alcock, 2012; Raman, 2003; Weber, 2001)。Inglis與Alcock (2012)

即透過專家和生手閱讀數學證明的眼動行為來比較他們判讀證明的行為與表現。研究顯示專家和生手在解讀證明的過程中，專家的注意力會不斷地在論證敘述中前後移動且深入分析證明結構及隱藏性的條件；而生手比較專注於表層特質而不易掌握其中的邏輯關係與結構。是故，如何輔助生手知覺幾何證明的結構和隱藏性的條件及認知負荷感受，是值得研究的議題。本研究即在了解分段方式降低幾何證明作業的複雜度對專家和生手理解幾何證明的表現與認知負荷感受間的關係，藉此進一步提出有效的幾何教學策略。

為了解分段方式對專家和生手理解幾何證明的表現與認知負荷感受間的關係，本研究首先透過皮爾森相關係數（Pearson's correlation coefficient）來分析專家與生手的理解表現與認知負荷感受兩者之間的關聯。藉由兩變項間的相關係數，我們可以個別比較不同理解層次與認知負荷感受各變項間的關係。例如，微觀層次與學習意願、局部層次與作業困難度等。然而，皮爾森相關係數僅能分析兩變項間的關係，對於學習意願與作業困難度間的認知負荷感受變項是否相互影響，或是微觀層次是否影響局部層次等不同理解層次間的關聯並無法兼顧。在結果分析與解讀上也較偏向單一面向。從一些研究結果（Cuevas, Fiore, & Oser, 2002; Hummel, Paas, &

Koper, 2004）中也可看出認知負荷與學習表現間的相關性並非總是那麼一致。Sweller、Ayres與Kalyuga（2011）也指出僅探討認知負荷與學習成效間的關係並不完備。因此，研究者將採用典型相關分析作進一步的探討。透過分析，我們可以了解同時考慮不同理解層次與認知負荷感受各變項間的結構關係，進而看出不同理解層次間形成的理解表現與認知負荷感受間的相關程度。此外，Paas與van Merriënboer（1993）將心智努力與學習成效做為學習效率測量的兩個維度。認為在學習過程中，透過學習效率來考慮認知學習的成本是件重要也是值得關注的議題。因此，若學生在不同學習方式下所得到的學習成效接近時，此時應考慮學生在何種學習方式下所付出的心智努力較低。亦即，在學習成效相近的情形下，降低認知負荷即是有益的教學方式，但可進一步分析其效率來說明何種學習方式是有效的。

綜合上述，本研究旨在探討以分段方式降低作業複雜度對專家和生手理解幾何證明的表現與認知負荷感受間的關係。因此，分別從認知負荷感受與理解表現的相關性、結構關係與學習效率等三個面向來探討，並由此發展出三個研究問題：

一、專家和生手在分段與未分段版本下的認知負荷感受與理解表現的相關性為何？