

## 壹、緒論

### 一、閱讀表現與學習目標

臺灣四年級學生參加 2006 年國際閱讀素養評量研究 (Progress in International Reading Literacy Study, PIRLS)，在四十五個參與的國家或地區中排名 22；與其在數學成就國際評比的研究結果相去甚遠。在教學現況中也不難發現，有些老師認為學生連閱讀中文都有問題更何況是閱讀印有許多符號的數學教科書；所以讓學生自己閱讀或預習數學課本對學生而言是很困難的，而且對學生學習數學的影響並不大。尤其是針對含有論證的內容時，更是懷疑讓學生自行閱讀或預習的效果。當然也有些老師認為學生透過閱讀課本並給予適當地提問，能夠運用既有的認知有效提升個人的數學能力。在數學教育的文獻中，甚少有關透過閱讀學習數學的研究 (Österholm, 2006)。基於上述現象，讓學生預習課本或引導學生閱讀課本的教學方式應該是不被重視的；更不用說藉由閱讀技巧的教學來協助學生理解數學課本。但是，如果研究上能針對學生透過自行閱讀數學文本時，產生的表現比沒有閱讀數學文本時更好，至少就能說服教師讓學生先作預習的工作。

閱讀是學習的目標也是學習的方法，哈佛大學教授 Chall (1996) 以六個階段描述學習閱讀的歷程，包含從正式教學前的閱讀、基本辨識的閱讀教學、建立順暢性的閱讀教學、透過閱讀吸取新知、透過閱讀得知不同觀點以及重構各種觀點等。這六個階段的後五個階段又可分成兩大部分，分別是「學習閱讀」(learning to read) 和「透過閱讀學習」(reading to learn)。在學校課程中，正式學習有關勾股定理的說明和應用是安排於國二上學期，國中時期正值學生處於需要透過閱讀學習新知的閱讀發展階段，本研究將針對此階段探討學生透過自行閱讀數學文本是否有助於其習得新知，以及不同的文本編排對其習得新知的影響有何不同。

### 二、勾股定理和畢氏定理的發展動力：應用和論證

由中西方數學的發展史可以發現：中國的數學發展著重於實際問題之解法，而西方的數學發展則重於探討定理一般性原則的理論意義。以勾股定理的發展為例，在中國，勾股術是古代算學的一個重要課題，勾股術中最為重要也最基礎的內容首推勾股定理，這在《九章算術》及《周髀算經》已有提及。數學史家錢寶琮從歷史的演進來看，發現在清代之前的「勾股定理」發展偏重實用方面，例如，明代算書中的勾股問題多以實用、生活化的方式來呈現，且有許多問題更是以詩詞歌訣的方式切入，將情境融入算題中 (王鼎勳, 2006; 黃清揚, 2001)。在西方，數學發展史可從古希臘數學家歐幾里德所著作的《幾何原本》談起，其歷史上的重要意義在於歐幾里德將之前數學家所累積的數學知識用公理法建立起一套嚴密的、邏輯演繹推理的幾何學知識體系，由少數幾條公理 (axioms) 出發，推導出所有的幾何定理。

該書被認為是用公理法建立演繹數學體系的最早典範，並對整個數學的發展產生了深遠的影響（王鼎勳，2006）。「勾股定理」在中國又稱「商高定理」，西方則稱之為「畢氏定理」。此概念在國中課程的學習上除兼具代數和幾何的學習內容，更是推理與證明的學習範疇（許淑清，2003）。

### 三、幾何證明閱讀理解的學習路徑：應用和論證

數學是所有科學的基礎，在應用數學成果的過程中則有賴於數學證明的閱讀理解。理解是閱讀的基本條件，若缺乏理解便不算是閱讀（吳惠琪，2004）。透過閱讀數學語言中所涉及的邏輯概念，應可進一步培養學生嚴密思考的功能。Yang 和 Lin（2008）將證明文本的內容視為起始資訊，學習者在閱讀證明文本後的認知視為新資訊，可就理解品質將讀者認知的新資訊區分為四個層次：（一）表層理解層次；（二）辨識元件理解層次；（三）鏈結元件理解層次；和（四）膠囊化理解層次。表層意指能理解證明過程中所用的數學符號或名詞；辨識元件意指能辨別前提、結論和引用性質的敘述；鏈結元件意指能依邏輯關係相鏈前提、結論和引用性質；膠囊化意指能適當應用證明過的命題。而依據學生的幾何證明閱讀理解表現，發現學生有兩種可能的學習路徑，一是從表層理解、辨識元件理解、鏈結元件理解至膠囊化理解層次循序漸進地發展，稱為「關係性理解型態」；二是從表層理解跳至膠囊化理解層次，再回到辨識元件理解和鏈結元件理解間的發展，稱為「工具性理解型態」（Lin & Yang, 2007）。第一種型態呈現先理解為什麼再來想如何應用，第二種理解型態呈現先能夠應用再來想其道理。這兩種不同的理解型態與中西方數學發展中，中國重視實用、西方重視邏輯演繹不謀而合。

### 四、科學文本編排方式：規則或證明優先

在科學文本的編排上也可找到類似的對應關係，大部分的科學文本主要以介紹與解釋現象規則為內容，所以其文本的編排可以區分為規則優先（principle first）或證明優先（proof first）。例如：先一般性解釋浮力與浮體體積和溶液密度的關係再介紹公式，即是證明優先；反之則是規則優先。Dee-Lucas 和 Larkin（1990）曾探討科學文本「規則優先」和「證明優先」的編排方式對學生閱讀理解的影響。研究結果發現：若先提供規則再給出規則背後的道理之文本（規則優先），有利於讀者評估相關的重點與立即性記憶；若是先提供規則背後的道理再提出規則（證明優先），將增加理解的困難度。此兩種形式與中西方的數學發展，以及學生幾何證明閱讀理解層次的路徑可互相對應，都表現出兩種不同的理解路徑。而數學證明文本是以證明與應用定理為內容，但是數學和科學文本中的證明意義不同。數學證明著重由前提至結論（定理）的推理，科學證明著重規則意義的解說。所以，本研究將數學文本的編排在引出定理後才區分為證明優先或應用優先。也就是說，介紹定理後接著證明，還是介紹定理後接著應用。