壹、緒論

Silver（1997）認為學習代數對日後數學的影響非常重大，因為它扮演著學生將來能否獲取更高學位的守門員角色。為協助學生在數學上有成功表現的機會，小學階段就應讓學生盡早接觸代數的觀念，而「代數思考」（algebraically thinking）就是最佳的內涵。為提升代數概念的理解，教育部（2003）頒布之「國民中小學九年一貫課程綱要」六年級數學能力指標代數部分，即宣稱學生應具備「使用未知數符號，將具體情境中的問題列成算式題，嘗試解題及驗算其解」，在教學總體目標裡則寄望學生在小學畢業前能利用常用的數量關係，解決日常生活的問題；為強調解題能力的培養，則建議可利用數學內部的連結貫穿數與量、代數、幾何等主題內涵，並由數學外部連結以強化生活及其他領域中數學問題的察覺、解題、溝通等能力，要求學生能分解複雜的問題為一系列的子題，選擇使用合適的數學表徵，熟悉像觀察、臆測、推演、驗證等歷程，運用歸納、演繹、推理、一般化、模型化等解題方法。透過九年一貫課程綱要能力指標之詮釋，可知要培養小學生代數思考的能力，那麼認識變數、運用算式呈現問題關係，尋找樣式一般化並進行論證與解說，應是數學課程與教學強化的重點。當學生能夠辨識問題中變數的關係，並能利用算式呈現問題結構以協助其推理和解題，那麼對未來進入國中或高中有關方程式、函數或更高深之數學概念的學習將更容易。因此，瞭解與促進小學生數學一般化的學習，將有助於填補算術轉換至代數思考之間的間隙（Kaput, 1999; Rivera, 2010）。

探索小學生如何理解和運用一般化具有兩項意義，一是呼應認知發展有關數學概念轉換的研究：學生理解與運用一般化，對於發展不同數學知識之間的交互作用提供一項重要的媒介。不同類型的數學知識常出現於學生的思考而轉換，例如小學教科書出現的問題：某百貨公司週年慶商品打七折出售，那麼先打折後再計 5%的稅比較便宜？還是先計 5%的稅後再打折較便宜？師生可以原價 1,000 元為例，經兩種方法$(1{,}000\times70\%)\times1.05=735$ 與$(1{,}000\times1.05)\times70\%=735$ 比較後，發現結果一樣，然後一般化予以轉換，以 x 表示任何原價，結果仍然相等：$(x\times70\%)\times1.05=(x\times1.05)\times70\%$；也可把打折幅度一般化，稅率也一般化得到$(x\times y)\times z=(x\times z)\times y$，此一般化的歷程學生除得到計算的技巧解決生活問題外，尚且獲得數學交換律的概念。二是對數學教學的啟發：可說明數學教學實務現場一些潛在的議題。以上述百貨公司商品打折問題為例，一般化產出的困難包含學生推理思考與解題策略之表現、問題樣式、定義特徵和解題方法，與學生在教室互動產出客觀化知識和意義所運用的訊號及步驟。

運用一般化呈現數學概念進而解題是代數思考的核心，雖然九年一貫課程綱要強調代數思考的重要性，小六數學課本也編列相關單元內容（例如數量關係、怎樣解題）以教導代數思考，然而，學生學習一般化有其困難所在，這牽涉到學生認知、教材特性與學習方法。為

提升一般化學習成效，Becker 與 Rivera（2005）提出建議，認為小學階段可運用圖形表徵促進學生一般化的學習，因為圖形的樣式能有效導引學生洞悉代數規則，經觀察相關要素後，可理解圖形問題中變數的特質與其結構關係（吳昭容、徐千惠，2010；馬秀蘭，2008；陳嘉皇，2006，2007；Mason, 1996; Moss, Beatty, McNab, & Eisenband, 2006）。

另外，決定與運用合宜的策略以提升學生一般化的理解亦非常重要，其目的在於促進數學概念、事實、習慣與步驟之間的連結與轉換。但如何建立一般化歷程重要概念與解題習慣的連結？一些學者認為可採取基模建構理論加以探討（Gick & Holyoake, 1980; Mayer, 1991）。基模的發展與轉換是透過學生對具有結構型態的問題、定義特徵與所需相似解題方法概念化的歷程，若有較廣泛的基模可應用，那麼學生會有較多的機會辨識新奇的問題，理解何時可運用學習過的策略解題。所以透過圖形規律問題與有效策略的教導，應可協助學生組織情境中變數的共通性，洞察某數量與另一數量如何建構關係，推理形成算式，增進解題效率並鞏固數學概念。然而，學生進行圖形樣式一般化時，會發展何種類型的基模？學生會採取何種基模協助進行辨認、擴展和一般化？何種基模包含圖形樣式一般化的本質？這些問題若能解決並系統化地說明，可提供實施一般化教學的參考依據，具深入探討的價值。本研究欲達成的目的如下：

一、探索國小學生對圖形規律問題一般化歷程產出的基模，掌握學生一般化認知結構，理解一般化運作情形。

二、明瞭學生一般化歷程基模轉換情形，建構一般化解題模式，以提升代數思考教學的成效。

貳、文獻探討

一、一般化定義與發展

何謂一般化？Dreyfus（1991）將其定義為是辨認範例的共通性（commonalities），對特殊範例進行推知（derive）或化約（induce），將正確歸納的結果擴展到更多案例的歷程。Polya（1957）將則一般化定義為是對單一物件逐漸發展到對一組物件的思考，對觀察的物件做類比、檢測而理解其關係的活動。解析 Dreyfus 與 Polya 一般化的定義，可知一般化的歷程是個體對物件特性加以觀察、連結以產生合宜規則，進而利用此規則解題與應用的歷程。因此，小學階段的數學一般化教學，應協助學生從特殊的範例去發展歸納的能力，鼓勵其採用有意義與正確的方法表達一般化。有效的一般化關聯以下問題：（一）何種特質的作業才可協助學生進行一般化？（二）在解題線索有限的範例中，何種連結歷程可促進學生發展一般化？（三）學生連結及歸納的一般化的能力如何？需具備何種基模才能進行擴展與解題？

對於何種作業才能進行一般化？Shipley（1993）主張應具備下列特質：（一）組合：可