

壹、前言

為配合社會變遷，人才培育的方向需更重視問題解決及終身學習能力的培養，因此，教育部（2014）提出「核心素養」作為各個課程發展的主軸，落實以人為本的終身學習精神，以及「自發、互動、共好」的理念，並提出「自主行動」、「溝通互動」和「社會參與」三大面向。與素養有關的研究主題因國際評量而日益受到重視（張毓仁、柯華葳、邱皓政、歐宗霖、溫福星，2011；彭開琮、張佳雯、李瑞生，2017）；然而，要將上述理念落實到教學實務中，教材設計及其發展將是重要的探討議題，它既是展現實施課程（implemented curriculum）中幫助學生獲取課程所安排之知識及技能的執行（operational）層次（van den Akker, 2003），也是實現達成課程（attained curriculum）的依據及支持。

數學是重要的學科之一，根據課程願景及理念發展學生數學素養自然是必須討論的議題。讓學生成為一位能夠靈活運用數學的人，無疑是二十一世紀數學教育的目標（Massachusetts Department of Elementary and Secondary Education, 2017），只是目前學生的數學學習成效，仍多由教師以統一的標準及規範，透過評量知識獲取的考試，作為判斷學生成就表現的標準，甚至形成了主導教學的局面。這樣的設計或許提供了較公平的參照，卻忽略了學生的不同特質和潛能，甚至造成對數學呈高成就低興趣的現象（Mullis, Martin, & Foy, 2008），而此現象與學生所受的教學方式之間有一定程度的相關（余民寧、韓珮華，2009），因此，如何設計出讓學生感到有用的數學是目前教育重要的方向。儘管課程大綱（國家教育研究院，2016）中對數學素養的課程設計已有一些說明，但數學概念也是學生不容易掌握的內容，必須配合學生對概念理解的認知發展，因此，要如何展現素養的內涵及幫助學生發展素養的數學教學設計，更是需要進一步探討的議題。

配合社會的人文經濟及資訊科技的發展，數學素養的意涵也不斷地演化及擴大，從過去重視閱讀、寫作、算術（簡稱 3R）（Papert, 1993），重視問題解決的過程及教學（Voskoglou, 2007），強調與數量相關思維的計數素養（numeracy）（Goos, Dole, & Geiger, 2012），或國際學生能力評量計畫（Programme for International Student Assessment, PISA）中強調學生解決問題時所能表現的數學素養（Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2016），雖然上述對數學素養的意涵尚未有統一的描述，但都是為了應用數學知識、技巧與思維以解決現實生活問題作為素養的核心。然而，當我們希望培育學生具備上述素養目標時，卻並非只強調數學與日常生活的連結就能達到，因為數學學習成效除了與學生對數學知識的理解外，與他們的自我概念、學習情緒、學習策略都有一定的影響（劉玉玲、沈淑芬，2015）。因此，與評量的觀點不同，培養學生數學素養的教學設計，將與數學素養的構成要素有密切關係，釐清相關要素將有助於做更全面的考量以達成教學目標。

一般而言，教學設計以不同的數學實踐（mathematical practice）呈現，除了需要注重數學

知識的獲取外，其意義、目的及呈現方式也是必須考慮的（Iowa Department of Education, 2010），因為有意義的數學實踐能夠強化理解，如解決與日常生活相關的問題；有目的的數學實踐能連結課程目標，如發展學生數學素養的課程；而其呈現方式則需要依據目標來進行設計，即教學設計必須能幫助學生理解數學的相關概念。Dubinsky 於 1980 年代開始，探討人類在學習一個數學概念時心智中的發展模型，提出 APOS（Action-Process-Object-Schema）理論（Arnon et al., 2014），配合數學概念的認知發展進行適當切割，從而提供對概念的理論分析及數學實踐設計的參考。

目前文獻上對數學素養的意涵存在不同的觀點，因此，本研究藉著對數學素養意涵的回顧及分析，整理出數學素養的構成要素以作為教學設計的依據，而數學知識的獲取是發展素養導向之數學教材設計的核心，本研究從 APOS 理論的觀點發展數學知識的學習模組，並透過數學素養導向之教材設計概念圖及實例，為以素養為導向的數學教材設計提供參考。

貳、數學素養的意涵

一般而言，數學能力多用於描述「符合理性及邏輯思維的發展」（Karsenty, 2014, p. 372），與學習具有抽象性及理論性數學有密切的關係。從不同的觀點來看，數學與數學素養都能說明對方的部分想法、行為或現象（Turner, 2012），但可以肯定的是，數學素養並不只包含數學知識及技巧（Niss & Højgaard, 2011），它比數學能力要表達出更多的內涵及構成要素。因為數學素養是一個有機體，只因個體的經驗及背景知識不同，所展現的方式將有差異，因而不會以有無素養做區分（Stacey & Turner, 2015），它將隨著社會變遷、文化差異及個體認知發展而改變。

在過去知識尚未普及的年代，閱讀、寫作、算術（Papert, 1993）就是教育的核心目標，其中的算術則著重在四則運算的應用上，因此，那時候素養一詞主要與讀、寫、算等基礎能力有密切的關係（Knoblauch, 1990）。而如今數學素養一詞在 PISA 的引導下，則廣泛被使用在描述現代公民在不同情境脈絡中，使用數學解決問題時所需具備的知識、技能、思維、態度等要素。也因地域不同，因而使用強調數字感及符號感的計數素養（Jablonka, 2003）或應用數學及統計來解決問題之思維習慣的量化素養（quantitative literacy）（Steen, 2001）。也因認知不同所展現在處理數學相關問題方法上的不同，如「街頭數學」（Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993）以非正規數學方式來處理學校外的數學問題。另外，在英文名詞中還有其他與數學素養具有近似意義的詞彙，如著重在解讀、推論、解釋及應用數據或計算結果的“matheracy”（D’Ambrosio, 1999）或延伸至描述統計素養（statistical literacy）及金融素養（financial literacy）（Geiger, Goos, & Forgasz, 2015）。這些用詞都因各自發展脈絡及強調的重點不同，而發展出不同的英文名詞。然而，這些用詞的背後都具有下列特徵：一、強調數學的應用性；二、著重與現實生活的連結性；三、與社會文化或人與人之間的互動有密切關係。換句話說，數學