

## 壹、緒論

代數是邁向高等數學的一個重要門檻，學習代數的學生相對上也日漸增加，但代數一直被視為是一個難教或難學的數學主題（Kieran, 2006; Stacey, Chick, & Kendal, 2004）。在代數學習的過程中，從算術思考轉為代數思考的學習過程中，「文字符號」（letters）一直扮演著極為重要的角色，郭汾派、林光賢與林福來（1989）曾指出，在解方程式、代數應用題等題材上都需要使用到文字符號，是重要的數學概念。有關文字符號的研究很多，但多數以 Collis（1975）探討英國青少年對代數文字符號的理解為基礎，將文字符號區分為六個類別，其中學童對文字符號的理解情形，也常作為學童算術思考或代數思考的指標。

算術思考與代數思考一直是倍受矚目的研究議題，Fillooy 與 Rojano（1984）以問題情境中未知數出現的情形提出算術與代數之間存在著落差（didactic cut），認為在未知數僅出現一次的問題情境中，學童可以透過逆運算（inverse operations）進行解題，但面臨未知數出現在方程式的兩側時，如  $ax + b = cx + d$ （其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $d$  為已知數），學童在解題上出現困難。Herscovics 與 Linchevski（1994）則有不同的見解，提出算術與代數之間存在著認知鴻溝（cognitive gap），而這個鴻溝是學童無法將未知數視為一個數學物件，以進行運算。

雖然 Herscovics 與 Linchevski（1994）從學童的嘗試代入策略中提出算術與代數的鴻溝，但卻未進一步探討學童約估<sup>1</sup>解題類型的多樣性，以及學童「面對問題——策略選擇」之間的關係，有鑑於此，本研究側重在探索學童面對未知數出現在方程式單側兩次的合成問題及分割問題時的約估解題類型，期望透過教學晤談法（teaching interview）（Ning, 1992）進一步蒐集學童的約估解題類型，以提供一些實證性資料作為課程教學與研究上的參考。

據上所述，本研究主要目的為：

- 一、透過教學晤談，探索六年級兒童約估解題類型的多樣性。
- 二、從學童的解題類型中，瞭解學童「面對問題——策略選擇」之間的關係。

## 貳、文獻探討

本研究由根本建構主義的知識論假設（von Glasersfeld, 1995）為立場，以皮

<sup>1</sup> 採用「約估」一詞而非「估算」或「概算」主要在強調藉由約估以求取準確值，而非估計值。

亞傑的基模論 (Piaget, 1970) 為心理學基礎，作為探討學童未知數的解題類型，以下分別說明基模論、未知數的意義及相關研究。

## 一、基模論

「基模」(scheme) 是皮亞傑 (Piaget) 用來描述認知發展歷程的內在基本物件或認知結構，而「知識」則是個體的基模與外在環境的交互作用，經由不斷地同化與調適所產生的結果 (Piaget & Inhelder, 1969)。von Glasersfeld (1980) 曾指出，皮亞傑的基模理論 (scheme theory) 是和根本建構主義相容的。因此，本研究對於學童有關「未知數概念」類型方面的知識上的說明，將以皮亞傑的基模論來加以組織。

為了彰顯基模的特性，von Glasersfeld 特別為基模下一個操作性的定義，以作為研究者進行概念分析時一項有用的工具。他指出一基模可以分成三個部分 (von Glasersfeld, 1980, 1995)：

第一，有一個同化後的情境，此情境是用來激發活動或運思（指內化後 (internalized) 的活動或概念上 (conceptual) 的活動) 的；

第二，有一串的活動或運思；

第三，也是最後，有些活動的成果或續局 (sequel)。

由上可見，欲主張學童有某些未知數概念的類型，即是主張學童存有特定的基模用來解決有關未知數概念的問題。具體的利用 von Glasersfeld 的操作性定義，欲主張學童有某類的未知數概念類型，即為具體的說明，學童將有關未知數概念的問題，當成（同化成）什麼樣的問題情境，問題情境中的構成要素——未知數概念——被允許進行哪一種形式的操作，以及操作之後，對操作的結果有無續局，以及續局的情形。

然而，由於內在的解題活動是無法觀察到的，因而研究者必須藉由學童的外顯活動（亦即學童使用基模的結果）的觀察來推測學童的特定基模。由於同一解題行為可以是發動不同基模的成果，是以研究者必須致力地使他對學童活動的解釋，契合學童的原始初衷 (intention)，且研究者要儘可能的不做過度的或不足的闡釋。

## 二、未知數的意義

以下分別就未知數的本質、未知數的表徵系統及未知數的解題活動三個部分說明未知數的意義，以作為本研究擬訂問題、分析及詮釋資料時的依據。